Thema	Lösen von quadratischen Gleichungen mit der pq-Formel
Voraussetzungen	Quadratwurzeln

Aufgabe & Lösung

1. Bestimme die Lösungen der Gleichung. Führe anschließend eine Probe durch.

$$x^2+\frac{10}{3}\cdot x-16=0$$

$$p=\frac{10}{3}\ ;\ q=-16$$

$$-\frac{p}{2}=\frac{10/3}{-2}=-\frac{5}{3}\quad ;\quad \left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2}&=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\\ &=-\frac{5}{3}\pm\sqrt{\frac{25}{9}-(-16)}\\ &=-\frac{5}{3}\pm\sqrt{\frac{169}{9}}\\ &=-\frac{5}{3}\pm\frac{13}{3}\end{aligned}$$

$$x_1=-6\quad\wedge\quad x_2=\frac{8}{3}$$

Probe für $x_1=-6$:

$$(-6)^2+\frac{10}{3}\cdot(-6)-16=0$$
$$36-20-16=0$$
$$0=0\ (w)$$

Probe für $x_2=\frac{8}{3}$:

$$\left(\frac{8}{3}\right)^2+\frac{10}{3}\cdot\frac{8}{3}-16=0$$
$$\frac{64}{9}+\frac{80}{9}-16=0$$
$$0=0\ (w)$$

Probe nach Vieta:

$$x_1\cdot x_2=-6\cdot\frac{8}{3}=-16=q\ \checkmark$$

$$x_1+x_2=-6+\frac{8}{3}=-\frac{10}{3}=-p\ \checkmark$$

$$L=\left\{-6\ ;\frac{8}{3}\right\}$$

Erläuterungen

Eine gemischtquadratischen Gleichung der Form $\boxed{x^2+px+q=0}$ löst man mit der

pq-Formel: $\boxed{x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}$

- Lese die Werte für p und q aus der Normalform (NF) $x^2+px+q=0$ ab und setze sie in die pq-Formel ein.
- Arbeite (soweit es geht) mit gekürzten Brüchen.
- Keine gemischten Zahlen, sondern unechte Brüche: nicht $4\frac{2}{7}$ sondern $\frac{30}{7}$.
- Rechne $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ direkt aus, vermeide Doppelbrüche.

Probe: Neben der normalen Probe durch Einsetzen der Lösungen in die Ausgangsgleichung, kann man die Lösungen der quadratischen Gleichungen in der NF $x^2+px+q=0$ auch sehr schnell mit Hilfe des **Satzes von Vieta** kontrollieren:

$$\boxed{\begin{aligned}x_1\cdot x_2&=q\\ x_1+x_2&=-p\end{aligned}}$$

Aufgabe & Lösung | **Erläuterungen**

2. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung.

$$2x^2 + 24x - 56 = 0 \qquad |:2$$

$$x^2 + 12x - 28 = 0 \qquad \text{Normalform}$$

$$p = 12 \quad ; \quad q = -28$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$= -6 \pm \sqrt{36 + 28}$$

$$= -6 \pm \sqrt{64}$$

$$= -6 \pm 8$$

$$x_1 = -14 \quad \wedge \quad x_2 = 2$$

Probe nach Vieta:

$$x_1 \cdot x_2 = -14 \cdot 2 = -28 = q \checkmark$$

$$x_1 + x_2 = -14 + 2 = -12 = -p \checkmark$$

$$L = \{-14 ; 2\}$$

Linearfaktorenschreibweise:

$$2x^2 + 24x - 56 = 0$$

$$2 \cdot (x - (-14)) \cdot (x - 2) = 0$$

$$2 \cdot (x + 14) \cdot (x - 2) = 0$$

Lösen einer gemischtquadratischen Gleichung der Form $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ mit der **pq-Formel**:

1. Schritt: Faktor vor x^2 entfernen
2. Schritt: **Normalform NF** $x^2 + px + q = 0$ herstellen
3. Schritt: Werte für p und q in die pq-Formel einsetzen und auflösen.
4. Schritt: Probe machen. Achtung: Vieta prüft nur die Richtigkeit der Normalform! Möchte man ganz sicher gehen, so muss man die Ergebnisse in die Ausgangsgleichung einsetzen.

Die Linearfaktorenschreibweise einer Gleichung erlaubt das sofortige Ablesen der Lösungen.

Linearfaktoren: $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$

3. Bestimme die Anzahl der möglichen Lösungen.

$$3(x + 2) = 1 - x^2 \qquad |\,T$$

$$3x + 6 = 1 - x^2 \qquad |+x^2 \quad |-1$$

$$x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$D = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 5 = 2{,}25 - 5 = -2{,}75 < 0$$

$\Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösungen: $L = \varnothing$

Die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung kann man mit Hilfe der Diskriminante[1)] D bestimmen.

1. Schritt: Bestimme NF $x^2 + px + q = 0$
2. Schritt: Berechne $D = \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q$.

Drei mögliche Fälle:

- $D>0$ Die Gleichung hat zwei Lösungen.
- $D=0$ Die Gleichung hat eine Lösung.
- $D<0$ Die Gleichung hat keine Lösungen.

1) Die Diskriminante (lat. discrimino = unterscheiden) ist der Term unter der Wurzel und hilft bei der Unterscheidung der 3 möglichen Fälle.

Aufgabe & Lösung	Erläuterungen

4. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für x.

$$9x^2 - bx + 4 = 0 \quad |:9$$
$$x^2 - \frac{b}{9}x + \frac{4}{9} = 0$$

$$p = -\frac{b}{9} \quad ; \quad q = \frac{4}{9}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$= \frac{b}{18} \pm \sqrt{\frac{b^2}{324} - \frac{4}{9}}$$
$$= \frac{b}{18} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 144}{324}}$$
$$= \frac{b}{18} \pm \frac{1}{18} \cdot \sqrt{b^2 - 144}$$

Um die Lösbarkeit zu diskutieren, ist die Frage zu klären, wann die Diskriminante negativ, positiv oder null wird.

$$D \gtreqless 0$$
$$b^2 - 144 \gtreqless 0$$
$$(b+12) \cdot (b-12) \gtreqless 0$$

Gleichung hat zwei Lsg.: $D > 0$

$$D > 0$$
$$b^2 - 144 > 0$$
$$b < -12 \vee b > 12$$

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 144}}{18}$$

Probe:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4}{9} = q \checkmark$$
$$x_1 + x_2 = \frac{b}{9} = -p \checkmark$$

$$L = \left\{ \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 144}}{18} \right\}$$

Gleichung hat eine Lösung: $D = 0$

$$D = 0$$
$$b^2 - 144 = 0$$
$$b^2 = 144 \quad |\sqrt{\ldots}$$
$$|b| = 12$$
$$b = -12 \vee b = 12$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$$

Probe: ✓

$$b = -12: \quad L = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

$$b = 12: \quad L = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

Gleichung hat keine Lösung: $D < 0$

$$D < 0$$
$$b^2 - 144 < 0$$
$$b > -12 \wedge b < 12$$

Probe: entfällt

$$L = \varnothing$$

Aufgabe & Lösung

5. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung.

$$x^2 - 7x = 0$$
$$x \cdot (x-7) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x - 7 = 0$$
$$x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 7$$

Probe nach Vieta:

$$x_1 \cdot x_2 = 0 \cdot 7 = 0 = q \checkmark$$
$$x_1 + x_2 = 0 + 7 = 7 = -p \checkmark$$
$$L = \{0\,;7\}$$

Merke: q=0 $\Rightarrow$ **Ausklammern!**

Erläuterungen

Fehlt bei einer quadratischen Gleichung das Absolutglied (q=0), so könnte man sie immer noch mit der pq-Formel lösen, einfacher ist aber der Weg über das Ausklammern!

$$x^2 - 7x = 0$$
$$p = -7 \quad ; \quad q = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 0}$$
$$= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}}$$
$$= \frac{7}{2} \pm \frac{7}{2}$$
$$x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 7$$

6. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung.

$$x^2 - 8 = 0 \quad |+8$$
$$x^2 = 8 \quad |\sqrt{}$$
$$|x| = \sqrt{8}$$
$$x_1 = -2\sqrt{2} \quad \wedge \quad x_2 = 2\sqrt{2}$$

Probe nach Vieta:

$$x_1 \cdot x_2 = -2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = -8 = q \checkmark$$
$$x_1 + x_2 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0 = -p \checkmark$$
$$L = \left\{-2\sqrt{2}\,; 2\sqrt{2}\right\}$$

Merke: p=0 $\Rightarrow$ **Wurzelziehen!**

Fehlt bei einer quadratischen Gleichung der Vorfaktor von x (p=0), so könnte man sie immer noch mit der pq-Formel lösen, einfacher ist aber der Weg über das Wurzelziehen!

$$x^2 - 8 = 0$$
$$p = 0 \quad ; \quad q = -8$$
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$= 0 \pm \sqrt{0 + 8}$$
$$= 0 \pm \sqrt{8}$$
$$= \pm 2\sqrt{2}$$
$$x_1 = -2\sqrt{2} \quad \wedge \quad x_2 = 2\sqrt{2}$$

Hinweise auf Druckfehler bitte an harald@ziebarth-net.de

Übungen Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

1. $x^2+5x-36=0$
2. $x^2-4x-32=0$
3. $x^2-4{,}2x+3{,}77=0$
4. $x^2+18{,}2x+82{,}81=0$
5. $x^2+8x+98=0$
6. $x^2-0{,}8x-73{,}8=0$
7. $x^2-0{,}5x+73=0$
8. $x^2+6{,}8x+11{,}56=0$
9. $x^2+15x+86=0$
10. $x^2-4{,}8x+5{,}76=0$
11. $x^2+14{,}8x+54{,}76=0$
12. $x^2+x+1=0$
13. $x^2-6x=19$
14. $m^2-0{,}6m+0{,}09=0$
15. $x^2+2x+11=0$
16. $x^2+\frac{16}{289}=\frac{8}{17}x$
17. $x^2+\frac{5}{8}x+\frac{281}{256}=0$
18. $x^2+14{,}8x=6654$
19. $z^2-18z+\frac{993}{11}=0$
20. $x^2+\frac{40.401}{62.500}=\frac{201}{125}x$
21. $x^2-10.25x+\frac{4307}{200}=0$
22. $r^2-\frac{8}{5}r+\frac{31}{50}=0$
23. $x^2+34{,}02x+289{,}3401=0$
24. $x^2-\frac{8}{7}x+\frac{333}{12}=0$
25. $x^2+\frac{10}{11}x+\frac{25}{121}=0$
26. $x^2+\frac{3}{8}x+\frac{9}{7}=0$
27. $x^2+153{,}17901=-26.011x$
28. $x^2+\frac{5}{8}x+\frac{25}{256}=0$
29. $c^2+234=8{,}47c$
30. $x^2-\frac{71}{221}x-\frac{40}{221}=0$
31. $x^2+6ax=1-9a^2$
32. $x^2-18ux+81u^2=26$
33. $x^2+9k^2=6kx$
34. $p^2+\frac{4}{9}pt+\frac{4}{81}\left(t^2+17.982\right)=0$
35. $r^2+\frac{16}{289}\frac{s^2}{t^2}=\frac{8rs}{17t}$
36. $x^2+156+49o^2=14ox$
37. $x^2+\frac{14x}{z}+\frac{49}{z^2}=0$
38. $x^2-18x+87=3a$
39. $x^2+121\frac{a^2}{u^6}=\frac{22ax}{u^3}$
40. $x^2+\frac{22x}{3w}+\frac{121}{9w^2}+97=0$
41. $r^2+4s^2=4s\cdot(1-r)-7$
42. $x^2+\frac{16}{19}hx+\frac{64}{361}h^2+84=0$
43. $x^2+46ax+529a^2=0$
44. $x^2-2kx+k^2=4-k^2$
45. $16z^2+379+r^2=8rz$
46. $2x^2+4x=30$
47. $-12x^2+12x+144=0$
48. $4t^2-24t+53=0$
49. $-125x^2+1.195x=2.856{,}05$
50. $-3{,}6x^2-133{,}2x+590{,}4=0$
51. $-4x^2+24x=36$
52. $0{,}3x^2=4{,}8x-84{,}2$
53. $6x^2+5{,}16x+1{,}1094=0$
54. $27x^2+594x+3.024=0$
55. $639{,}3=1{,}7a^2+30{,}6a$
56. $7x^2+42x+69=0$
57. $\frac{15}{4}z^2+\frac{60}{1.369}=\frac{30}{37}z$
58. $11{,}5x^2+289{,}8=135{,}7x$
59. $-13{,}08x^2+\frac{327}{115}x=\frac{327}{2.116}$
60. $6x^2+49{,}2x+918{,}86=0$
61. $2t^2+4t=2\sqrt{3}t+4\sqrt{3}$
62. $9{,}5x^2+30=19\sqrt{2}\,x$
63. $-\frac{7}{81}x^2-\frac{574}{405}x=\frac{11.767}{2.025}$
64. $4b\cdot\left(\sqrt{6}-2\sqrt{5}\right)+4\sqrt{30}=8b^2$
65. $-\frac{8}{17}x^2-\frac{10}{3}x-\frac{37.981}{360}=0$
66. $17{,}75z^2-\frac{284}{3}z=-\frac{1.235}{9}$
67. $2{,}25x^2+\frac{9}{4}\sqrt{10}x+5{,}625=0$
68. $29{,}52x+8.380{,}564=4{,}1x^2$
69. $-18{,}04x^2-\frac{82}{75}\sqrt{11}\,x-\frac{41}{225}=0$
70. $\frac{5}{38}x^2+x+106{,}9=0$
71. $\frac{2}{17}r^2-\frac{24}{119}r+\frac{72}{833}=0$
72. $\frac{27}{25}x^2-\frac{3}{25}=0$
73. $-\frac{5}{14}x^2-\sqrt{7}-\frac{81}{35}x=\frac{6.561}{1.750}$
74. $\frac{3}{8}x^2-\frac{327}{1.496}x=\frac{27}{374}$
75. $9{,}5x^2+19=19\sqrt{2}\,x$
76.
77.
81.
82.
86.
87.

78.	83.	88.
79.	84.	89.
80.	85.	90.
91. $x^2 + 166x - 732 = 0$	96.	101.
92. $x^2 - 5{,}19x = 44{,}7466$	97.	102.
93.	98. $\frac{71}{4}u^2 - \frac{284}{3}u = -\frac{1.037}{9}$	103. $x^2 + 150sx + 5625s^2 = 2s$
94.	99.	104.
95.	100. $x^2 - 10sx + 25s^2 = 8t$	105. $x^2 + \frac{e^2}{9u^2} = 18 + \frac{2}{3}\frac{ex}{u}$